

Gestión de las interacciones durante una lección sobre la diferencial: una competencia del profesor de matemáticas

Manuel Alejandro Verón ¹

Belén Giacomone ²

RESUMEN

En este trabajo se presenta una valoración de la idoneidad interaccional de tres fragmentos de diálogos de una clase con futuros profesores de matemáticas, donde se discute sobre la resolución de un problema en torno a la diferencial. Para realizar la valoración se utiliza la noción de idoneidad didáctica desarrollada por el Enfoque Ontosemiótico (EOS), con el fin de estudiar en qué medida los modos de interacción favorecen la negociación de los significados y permiten identificar y resolver potenciales conflictos semióticos. Como resultados, se observa que las intervenciones del docente propician el desarrollo de competencias comunicativas y argumentativas, como así también ponen en discusión potenciales conflictos epistémico-cognitivos en relación con el estudio de la diferencial

PALABRAS CLAVE

Idoneidad didáctica, Interacciones, Diferencial, Formación docente, Conflictos epistémico-cognitivos.

¹ alejandroveron@fceqyn.unam.edu.ar

Universidad Nacional de Misiones, Argentina

<https://orcid.org/0000-0002-3160-1031>

² belen.giacomone@unirmsm.sm

Universidad de la República de San Marino, Dogana, San Marino

<https://orcid.org/0000-0001-6752-2362>

Verón, M. A., & Giacomone, B. (2024). Gestión de las interacciones durante una lección sobre la diferencial: una competencia del profesor de matemáticas. En Sánchez Aguilar, M., García González, M., & Castañeda, A. (Eds.), *Investigación, docencia y difusión de la educación matemática* (pp. 00–00). SOMIDEM Editorial. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/00/0000/00-00>

INTRODUCCIÓN

Algunas investigaciones han reportado los conflictos que representa el estudio de la diferencial de una función en los procesos de enseñanza y aprendizaje por parte de estudiantes y profesores de matemática, física, ingeniería y ciencias experimentales (Ely, 2021; López-Gay et al., 2015). Estos conflictos no están sujetos exclusivamente a aspectos epistémicos o cognitivos, sino que también se han reportado sobre la importancia de analizar cuestiones instruccionales, como la forma de presentación y tratamiento que recibe la diferencial en un libro de texto o en una clase. En este sentido, este trabajo presenta un reporte de investigación donde se estudia en qué medida las interacciones que se plantean en una clase propician espacios de discusión de los distintos significados del concepto, y permiten, a su vez, abordar y resolver potenciales conflictos epistémico-cognitivos.

Para comprender y afrontar los conflictos asociados a este concepto, diversos autores han elaborado modelos parciales o clasificaciones de los significados de la diferencial según los usos y aplicaciones que hacen los estudiantes (Dray & Manogue, 2010; Ely, 2021; Hu & Rebello, 2013; López-Gay et al., 2015; Oldenburg, 2016; Pulido, 2010; Valdivé & Garbin, 2008; Von Korff & Rebello, 2014). En esta misma línea, Verón y Giacomone (2021) han realizado una descripción detallada de los significados parciales de la diferencial a partir de un estudio histórico-epistemológico donde abordan la complejidad ontológica semiótica del concepto.

Considerando la importancia de estudiar potenciales conflictos instruccionales –relacionados a los modos de interacción– que pueden surgir en el estudio de problemas de cálculo, este trabajo se enfoca en el análisis y valoración de los modos de interacción entre profesor y estudiantes, y entre los mismos estudiantes, en un contexto de formación inicial de profesores. En particular, se estudian en qué medida las interacciones que emergen en la clase, a partir de la discusión de una situación-problema sobre la diferencial, permiten abordar conflictos epistémicos y cognitivos, así como en qué grado estas favorecen situaciones de negociación de los significados del concepto diferencial. Cabe aclarar que este estudio forma parte de una investigación doctoral en curso de la Universidad Nacional de Misiones, que indaga sobre los conocimientos y competencias didáctico-matemáticos de procesos de estudio de la diferencial de una función en el contexto de la formación de profesores de matemáticas.

Para llevar a cabo este análisis se utiliza el marco teórico y metodológico del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción **matemática** (EOS) (Godino et al., 2020). En particular, se hace hincapié en el sistema de facetas, componentes e indicadores de idoneidad didáctica que permiten valorar procesos de estudio (Godino, 2013).

La aplicación de esta herramienta para valorar procesos de instrucción ha generado un interés creciente a nivel internacional, sin duda motivado por su versatilidad como herramienta teórica y metodológica (Malet et al., 2021). Dados los objetivos propuestos, en este trabajo, nos centramos en una de las seis facetas: la interaccional, con particular atención en cómo los estudiantes construyen significados matemáticos a través de la interacción y la comunicación con el profesor y otros estudiantes. Al utilizar la idoneidad didáctica y la perspectiva del EOS, se busca evaluar cómo las interacciones en la clase afectan el aprendizaje del concepto diferencial y cómo se pueden mejorar las prácticas de enseñanza de este tema.

A continuación, se sintetizan las nociones teóricas del EOS que fundamentan el abordaje del problema de investigación; posteriormente se presenta el método empleado para el desarrollo del estudio junto con la situación-problema utilizada como instrumento. Luego se muestra el análisis y valoración de la idoneidad interaccional de los diálogos de los estudiantes y el profesor; y, finalmente, se discuten algunas implicaciones para la formación de profesores de matemáticas.

MARCO TEÓRICO

El EOS es un sistema teórico modular, abierto e inclusivo que trata de proporcionar principios y herramientas teóricas y metodológicas para abordar los problemas epistemológicos, ontológicos, cognitivos, instruccionales y ecológicos inherentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2022).

Desde el EOS se ha desarrollado la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013) como un criterio sistémico de optimización de los procesos de instrucción, que tiene en cuenta seis dimensiones o facetas que determinan los focos de atención del análisis didáctico y la articulación de estas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Dado que las dimensiones no son observables directamente, el EOS aporta un sistema de criterios e indicadores empíricos para cada una de ellas, los cuales permiten analizar, valorar y mejorar el proceso de instrucción.

Este trabajo se centra en la valoración de la idoneidad interaccional de una lección sobre la diferencial. Un proceso de enseñanza y aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten identificar conflictos semióticos potenciales a priori y resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. Aplicado a este estudio en particular, se trata de estudiar en qué medida la gestión de las configuraciones didácticas permiten la negociación de los significados del concepto matemático en estudio. Para ello se estudian los modos de interacción entre docente y estudiantes, y entre los mismos estudiantes, los cuales permiten identificar y resolver potenciales

conflictos semióticos, favorecer el aprendizaje autónomo y el desarrollo de competencias comunicativo-argumentativas (Godino, 2013). Este análisis permitirá al profesor valorar que tan adecuada ha sido la gestión de las interacciones en la clase y si ha permitido resolver las dificultades de los **alumnos**.

El análisis que se presenta se basa, entonces, en la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica descritos en Godino (2013), los cuales son detallados en el apartado “Valoración de la idoneidad interaccional”, particularizados al concepto de la diferencial y los significados que la caracterizan.

En Verón y Giacomone (2021) se han descrito cuatro significados parciales de la diferencial, caracterizando los sistemas de prácticas, objetos y procesos que intervienen y emergen en cada significado. A groso modo, **el** Diferencial de Leibniz se asocia con la consideración de la diferencial como una cantidad infinitesimal o infinitamente pequeña; **el** Diferencial de Cauchy se relaciona con el uso de la derivada para definir al diferencial por medio de la ecuación ; **el** Diferencial de Fréchet se asocia a situaciones problemas en las que se involucra la estimación lineal, la linealización; y **el** Diferencial de Robinson se conecta con los infinitesimales en el campo del análisis no estándar (Verón et al., 2022).

MÉTODO

Para la valoración de la idoneidad interaccional se emplea una metodología cualitativa (McMillan & Schumacher, 2001), basada en la transcripción de tres fragmentos de diálogos entre un profesor (doctorando) y dos estudiantes sobre la resolución de un problema en torno al estudio de la diferencial de una función.

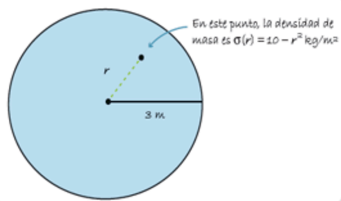
Figura 1

Situación-problema. Adaptado de Salinas et al. (2012, p. 142)

Problema:

Considerando una lámina circular de 3 metros de radio, cuya masa se distribuye de tal manera que la densidad en todo punto es $\sigma(r) = 10 - r^2$ (kg/m²), donde r es la distancia del punto al centro de la lámina. Se pide:

Determinar la masa M total de la lámina circular con la densidad de masa dependiendo de radio.



Masa = densidad x área

Luego se aplica la técnica de análisis de contenido (Cohen et al., 2007) a partir de los criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2013), cuyas facetas, componentes e indicadores permiten al profesor realizar una reflexión sistemática sobre la gestión de las interacciones en la medida que se potencie el aprendizaje, se identifiquen y resuelvan potenciales conflictos semióticos y se planteen mejoras. Los diálogos que se recuperan pertenecen a una interacción entre un profesor y dos estudiantes del cuarto año del profesorado de matemáticas de un instituto superior de formación docente de Argentina. El contexto de discusión es la resolución de un problema sobre el cálculo de la masa total de una lámina circular adaptado de Salinas et al. (2012, p. 142), tal como se muestra en la Figura 1.

Valoración de la idoneidad interacciona

Un proceso de enseñanza y aprendizaje se podrá valorar con una alta idoneidad interaccional en la medida en que las intervenciones y la gestión de las interacciones por parte del profesor permitan reconocer, potenciar y/o advertir sobre cuestiones como:

- Reconocer los significados parciales personales que manifiestan los estudiantes en sus discursos y/o resoluciones.
- Potenciar las relaciones entre los objetos matemáticos que manifiestan los estudiantes.
- Advertir el surgimiento de potenciales conflictos epistémicos y/o cognitivos.
- Resolver las dudas o conflictos presentados por los estudiantes.
- Generar espacios de discusión del tipo dialógica y colaborativa entre los estudiantes.
- Favorecer el desarrollo de competencias argumentativas y comunicativas.
- Favorecer la autonomía y el desarrollo progresivo en los aprendizajes de los estudiantes.

Estos criterios básicos, que dependen de interacciones entre docente-discente y entre estudiantes, también implican interacciones personales (o bien momentos de estudio en autonomía) y de evaluación formativa, dedicada a la observación del seguimiento cognitivo de los estudiantes. Estos criterios pueden guiar la reflexión global de los procesos instruccionales por parte de los profesores para mejorar sus prácticas de enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes (Giacomone et al., 2018; Godino et al., 2023).

Teniendo en cuenta estos criterios, a continuación, recuperamos tres fragmentos de diálogos del profesor con los estudiantes (E1 y E2) de la clase para analizar el grado de idoneidad interaccional.

Diálogo 1

Profesor: *Es decir, vos me estás señalando que el radio va a ir ...*

Estudiante 1: *Aumentando.*

Profesor: *¿Va a ir aumentando o tiende a cero?, ¿o cómo es el tema?*

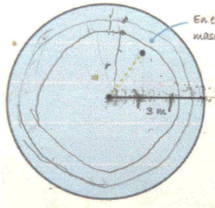
Estudiante 1: *Tiende a cero. Digamos, ... la distancia entre cada punto que tomemos ... porque, por ejemplo, si tomamos entre 1 y 2, el radio puede variar muchas veces, o sea, en cada punto que hay en este segmento el radio va a cambiar y va a cambiar el área.*

En el diálogo analizado se puede observar cómo el profesor propicia la búsqueda de explicaciones y la validación de las interpretaciones de los estudiantes. Las preguntas que plantea están diseñadas para hacer que los estudiantes se responsabilicen por la resolución del problema y para potenciar sus capacidades comunicativas y argumentativas. De esta manera, el docente promueve un ambiente de aprendizaje colaborativo donde se les exige a los estudiantes que justifiquen sus respuestas y se involucren en la construcción de conocimiento de manera activa y reflexiva. En general, la actuación del profesor en este diálogo refleja una idónea gestión de las interacciones en términos de promover el pensamiento crítico y la participación de los estudiantes en la construcción de conocimiento matemático.

Por otro lado, las preguntas pretenden poner en discusión con los estudiantes un potencial conflicto epistémico-cognitivo, ya que reconocer la variación del radio y su dominio de definición (en este caso puede tomar todos los números reales entre 0 y 3) implica un salto importante en la conceptualización al considerar infinitos valores de radio y, en consecuencia, infinitas circunferencias concéntricas, como se puede apreciar en la resolución del estudiante E1 en la Figura 2.

Figura 2

Representación gráfica del E1



Diálogo 2

Estudiante 1: *Como que va a ser una circunferencia dentro de esta, otra y otra ...*

Profesor: *¡Interesante eso!, ¿cómo sería? ¿cómo sería una circunferencia dentro de otra?*

Estudiante 1: *Como coronas.*

Profesor: *¿Cómo?*

Estudiante 1: *Coronas, una dentro de la otra corona y ahí le vuelvo ...*

Profesor: *A ver, ¿cómo sería el gráfico, más o menos, de esas coronas que vos me estás diciendo?*

.....

Profesor: *Y ahí, ¿dónde estaría ese radio que estás mencionando?, ¿qué tendría a cero?*

Estudiante 1: *O sea, la distancia entre una circunferencia y la otra no es el radio, no va a tender a cero el radio, sino que va a tender a cero la distancia entre el radio de la primera y el radio de la segunda, digamos que la distancia entre los dos radios tendería a cero, no el radio en sí.*

Nuevamente, las intervenciones del profesor buscan que los estudiantes amplíen sus explicaciones y desarrollen y justifiquen sus afirmaciones. Además, se destaca la actuación del profesor al motivar a los estudiantes por su resolución, y por incentivar el uso de otras representaciones (lenguajes), como gráficos, para mejorar la comunicación de las ideas matemáticas de los estudiantes.

La consideración de coronas circulares concéntricas en lugar de circunferencias implica un gran salto cualitativo, en el sentido de la complejidad de las prácticas, objetos y procesos que están interviniendo y emergiendo para buscar una solución al problema. Este hecho es didácticamente significativo, ya que implica un cambio importante en la consideración del radio; en lugar de trabajar con circunferencias con diferentes radios, se pasa a trabajar con coronas circulares, cuyo radio está formado por la diferencia entre dos radios. De esta manera surge un nuevo proceso de conceptualización que se encuentra en dirección con la consideración del diferencial radio como una cantidad infinitamente pequeña que se obtiene por la diferencia de dos valores muy próximos entre sí (Verón & Giacomone, 2021).

Diálogo 3

Profesor: *Entonces, la distancia que hay desde este punto hasta esta circunferencia es el radio, ¿no?* (Ver Figura 3)

Estudiante 1: *Es el radio.*

Profesor: *Pero la distancia que hay desde el centro hasta la otra circunferencia ...*

Estudiante 1: *Es radio más diferencial radio.* (Ver Figura 3)

Profesor: *Es el radio más el diferencial radio, entonces teniendo estos dos valores, ahí podríamos plantear lo que estás diciendo sobre la diferencia de área.*

Profesor: *Mediante la fórmula del cálculo del área del círculo donde un radio va a ser r que es el que ya conocemos, π por radio cuadrado, ¿no?*

Estudiante 1: *Menos.*

Profesor: *Y el otro es ...*

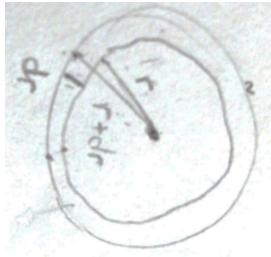
Estudiante 1: *r más diferencial r al cuadrado.*

Profesor: *¡Si!*

Profesor: *Bueno, plantéalo para ver cómo quedaría. Entonces, la idea es hallar la expresión del área de esa corona circular con estas condiciones.*

En las interacciones del tercer diálogo, las intervenciones del profesor contribuyen a que los estudiantes organicen la información y exploren posibles expresiones para calcular la diferencial área. Para lograr este proceso de conceptualización, resulta necesario que los estudiantes puedan manifestar un conjunto de prácticas y objetos matemáticos para establecer a la diferencial área.

Si bien, la gestión del profesor se podría mejorar porque resulta muy guiada, se considera que las decisiones que ha tomado a partir de las prácticas personales de los estudiantes permitieron avanzar hacia la definición del diferencial área, resolver potenciales conflictos epistémico-cognitivos y, en consecuencia, continuar con la resolución del problema.

Figura 3*Representación gráfica del E1***DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES**

En este trabajo se ha presentado el análisis y valoración de la idoneidad interaccional de tres fragmentos de diálogo de una clase con futuros profesores de matemáticas, donde se pone en discusión la resolución de un problema del cálculo de la masa total de una lámina circular con relación al estudio de la diferencial de una función.

El análisis muestra que el profesor genera interacciones con el objetivo de poner en discusión potenciales conflictos epistémico-cognitivos para trabajarlos y resolverlos, para seguir avanzado en la comprensión y resolución del problema. Aun así, de acuerdo con Planas y Iranzo (2009)

para tener un mejor conocimiento sobre las condiciones de la comunicación, sería necesario un análisis longitudinal que mostrara cómo se gestionan los conflictos entre significados, a medida que los participantes comparten más tiempo en el aula y aprenden a intercambiar referentes y prácticas. (Planas & Iranzo, 2009, p. 210)

Se destaca que la gestión de las intervenciones propicia el desarrollo de competencias comunicativa-argumentativas por parte de los estudiantes, ya que constantemente se les solicita que amplíen sus explicaciones, empleen otros recursos para mejorar la comunicación de sus ideas y puedan emprender caminos de validación de sus afirmaciones. En este caso, se puede observar que las intervenciones específicas del profesor tienen un impacto positivo en la capacidad de los estudiantes para expresar y comunicar las relaciones entre los objetos matemáticos implicados en el problema. La estrategia didáctica es dirigir la atención de los estudiantes hacia el significado parcial del Diferencial de Leibniz y el concepto de cantidad infinitesimal; de hecho, las interacciones resultan positivas para generar momentos en los que emerjan procesos de conceptualización que conducen a establecer al diferencial radio como una cantidad infinitesimal, siendo un aspecto principal para la consolidación de los distintos significados de la diferencial (Verón & Giacomone, 2021).

En general, se observa que en los tres fragmentos de diálogos predominan los formatos de interacción de tipo dialógico y de trabajo colaborativo. Esta

forma de gestionar las configuraciones didácticas permite que los estudiantes puedan mostrar un conjunto de prácticas, objetos y procesos personales, generándose de esta manera indicadores explícitos de la relación que están construyendo los estudiantes con los objetos matemáticos. Estos indicadores pueden ser utilizados por el profesor para valorar las relaciones, el proceso, y, oportunamente, tomar decisiones en relación con las intervenciones para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Si bien en este trabajo se han recuperado solo tres fragmentos de diálogo para valorar su idoneidad interaccional, consideramos que es necesario proponer este tipo de actividades en la formación de profesores de matemáticas con consignas que propicien la reflexión sobre la gestión de las interacciones, siendo una competencia profesional del profesor.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco de los proyectos ~~PFID FID 2021-45 (Panamá)~~, PID2021-122326OB-I00 (España), 16/Q1706-PI y 16/Q1746-TI (FCEQyN – UNaM, Argentina).

REFERENCIAS

- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.
- Dray, T., & Manogue, C. A. (2010). Putting differentials back into calculus. *College Mathematics Journal*, 41(2), 90–100.
<https://doi.org/10.4169/074683410X480195>
- Ely, R. (2021). Teaching calculus with infinitesimals and differentials. *ZDM*, 53, 591–604. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01194-2>
- Giacomone, B., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, e172011.
<https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011>
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8 (11), 111–132.
<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720>
- Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 2(2), e202201.
<https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.25>
- Godino, J. D., Batanero, C., & Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(6), em2270.
<https://doi.org/10.29333/ejmste/13187>

- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 3–15. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>
- Hu, D., & Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics – Physics Education Research*, 9(2), 1–14. <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.9.020108>
- López-Gay, R., Sáez, J. M., & Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education*, 24(5–6), 591–613. <https://doi.org/10.1007/s11191-015-9757-7>
- Malet, O., Giacomone, B., & Repetto, A. M. (2021). La Idoneidad didáctica como herramienta metodológica: desarrollo y contextos de uso. *Revemop*, 3, e202110, 1–23. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202110>
- McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2001). *Research in education: A conceptual introduction* (5th ed.). Long.
- Oldenburg, R. (2016). Differentiale als prognosen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37, 55–82. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0096-2>
- Planas, N., & Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(2), 179–213. <https://bit.ly/3TQ8ex1>
- Pulido, R. (2010). La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-1), 85–97. <https://bit.ly/3TRs5vL>
- Salinas, P., Alanis, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., & Garza, J. L. (2012). *Cálculo aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos Tomo 2*. Cengage Learning Editores.
- Valdivé, C., & Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(3), 413–450. <https://bit.ly/3Ty05Pr>
- Verón, M. A., & Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop*, 3, e202109. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202109>
- Verón, M. A., Giacomone, B., & Benítez, M. del C. (2022). Significados que los estudiantes de ingeniería otorgan al concepto de diferencial. *Advances in Engineering and Innovation*, 7(15), 86–94. <https://hdl.handle.net/20.500.12219/5079>
- Von Korff, J., & Rebello, N. S. (2014). Distinguishing between change and amount infinitesimals in first-semester calculus-based physics. *American Journal of Physics*, 82(7), 695–705. <https://doi.org/10.1119/1.4875175>